30б.

Славкин 11"А"
МБОУ „СОШ №4"

Школьный тур Всероссийской олимпиады по математике

11 класс (2019-2020 уч. год)

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

11.1. Делится ли $13^{2013} + 13^{2014} + 13^{2015}$ на 61?

11.2. Сколько лет человеку, если в 2012 году его возраст оказался равным сумме цифр года его рождения.

11.3. Докажите, что на графике функции $f(x)=x^3+3x^2+3x-3$ найдётся точка, которая является центром симметрии графика.

11.4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x-a=1, \\ \sqrt{x}+\sqrt{a}=1; \end{cases}$ имеет решения?

11.5. Три шара радиуса R касаются друг друга и плоскости α, четвертый шар радиуса R положен сверху так, что касается каждого из трех данных шаров. Определите высоту «горки» из четырех шаров.

$13^{2013}+13^{2014}+13^{2015}=13^{2013}(1+13^{1}+13^{2})=13^{2013}\cdot(1+13+169)=$
$13^{2013}\cdot 183=13^{2013}\cdot 61\cdot 3 \Rightarrow 13^{2013}+13^{2014}+13^{2015}$ делится на 61

7б

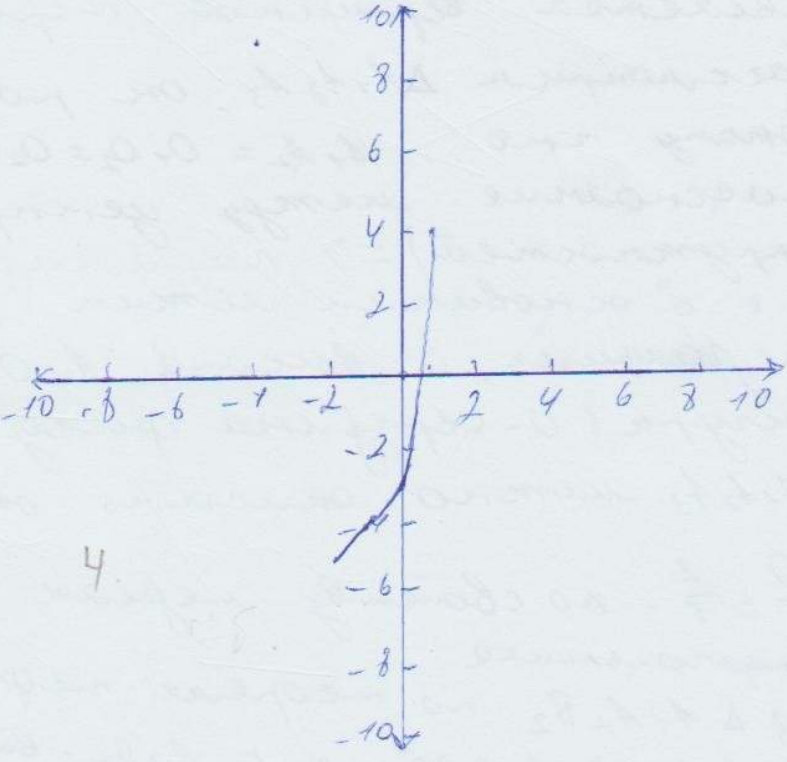
2. x - возраст человека в 2012 году, тогда abcd - год его рождения.
Составим уравнение:
$abcd=x$
Методом подстановки получаю 2 решения

$1+9+8+7=25$ $2+0+0+5=7$ 7б

Если человеку 25 лет на 2012 год, то сумма цифр его года рождения равна его возрасту, аналогично с 7-ю годами.
Ответ: 25 лет, 7 лет.

3. $f(x)=x^3+3x^2+3x-3$

$f(0)=-3$
$f(1)=4$
$f(-1)=-4$
$f(2)=23$
$f(-2)=-5$



$f(x)=x^3+3x^2+3x-3$ не имеет точки, которая является центрам симметрии графика.

4

4 $\begin{cases} x-a=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{a}=1 \end{cases}$

$a=x-1$
$(\sqrt{a})^2=(1-\sqrt{x})^2$
$a=1-2\sqrt{x}+x$
$x-1=1-2\sqrt{x}+x$
$x-x+2\sqrt{x}=1+1$
$2\sqrt{x}=2$

$\sqrt{x} = 1$

$x = 1$

$1 - a = 1$

$-a = 0$

$a = 0$

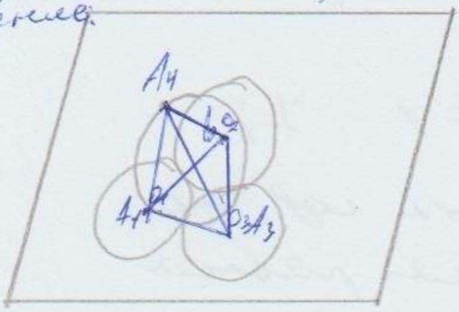
7б

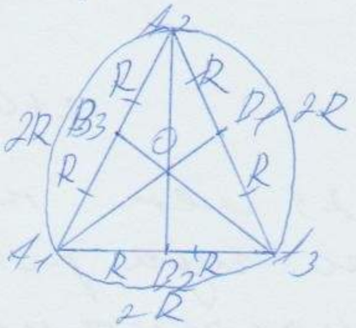
Ответ: 0

5. Дано: 4 шара радиусом R, плоскость α

Найти: h горки из 4 шаров

Решение.





7б

Шары с центрами $O_1, O_2, O_3 \cap \alpha$ в точках A_1, A_2, A_3 соотвенственно. Шар с центрам O_4 пересекает остальные шары, а его высшая точка A_4, является вершиной пирамиды $A_4A_3A_2A_1$.

Рассмотрим $\Delta A_1A_2A_3$, он равносторонний потому что $A_1A_2 = O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2R$ (как расстояние между центрами одинаковых окружностей) => пирамида $A_4A_1A_2A_3$ - правильная т.к. в основании лежит равносторонний треугольник, а высота A_4O падает в середину фигуры (O-середина фигуры т.к. вокруг $\Delta A_1A_2A_3$ можно описать окружность)

$\frac{A_2O}{OB_2} = \frac{2}{1}$ - по свойству медиан вписанного в окр. треугольника

из $\Delta A_1A_2B_2$ по теореме пифагора найдем A_2B_2 ($\angle A_1B_2A_2 = 90^\circ$, т.к. A_2B_2 - высота, потому что $A_1A_2 = A_2A_3$)

$A_2B_2 = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$, тогда $A_1O = \frac{2 \cdot R\sqrt{3}}{3} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ => По теореме Пифагора A_4O можно найти из ΔA_1OA_4.

$A_4O = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)} = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{4R^2 \cdot 3 - 4R^2}{3}} = \sqrt{\frac{12R^2 - 4R^2}{3}} = \sqrt{\frac{8R^2}{3}} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}$

Тогда h горки $= 2R\sqrt{\frac{2}{3}} + 2R$ (диаметр шара)

Ответ: $2R\sqrt{\frac{2}{3}} + 2R = 2R\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 1\right)$